Tecnólogo em Análise e Desenvolvimentos de Sistemas _ TADS

Aula 2
Limites

Professor Luciano Nóbrega

O LIMITE DE UMA FUNÇÃO

Inicialmente, vamos analisar o comportamento da função f definida por f(x) = x + 1 para valores de x próximos de 2, ou seja, quando x "tende" à 2.

x	y=x+1
1	
1,5	
1,9	
1,99	

x	y=x+1
3	
2,5	
2,1	
2,01	

Mas nem sempre podemos, simplesmente, substituir diretamente o valor de x.

Vejamos esse outro exemplo

x	y
2	
2,5	
2,9	
2,99	

x	y
4	
3,5	
3,1	
3,01	

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = ?$$

Se substituirmos "x" por 3, teremos uma indeterminação.

Para obtermos o resultado esperado, devemos fatorar a expressão.

O LIMITE DE UMA FUNÇÃO

$$\forall x \neq a$$

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L}$$

DEFINIÇÃO

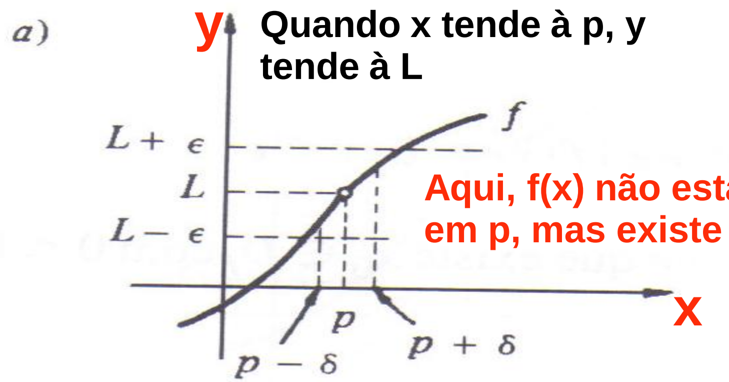
Dizemos que uma função f(x) tem limite “L” quando x se aproxima de um número “a”, se f(x) se aproxima de “L” sempre que “x” se aproxima de “a”, mas tendo o cuidado de “x” ser diferente de “a”.

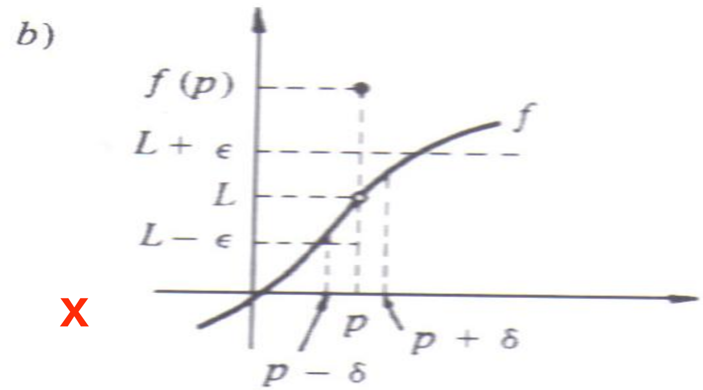
Quando x tende à p, y tende à L

Aqui, f(x) está definida em p e existe L, mas f(p) ≠ L

Quando x tende à p, y tende à L

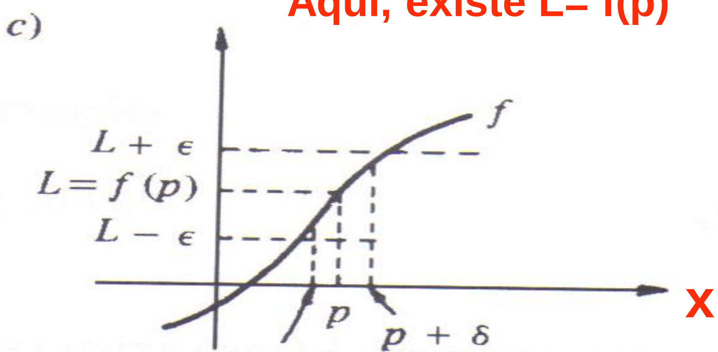
Aqui, f(x) não está definida em p, mas existe L

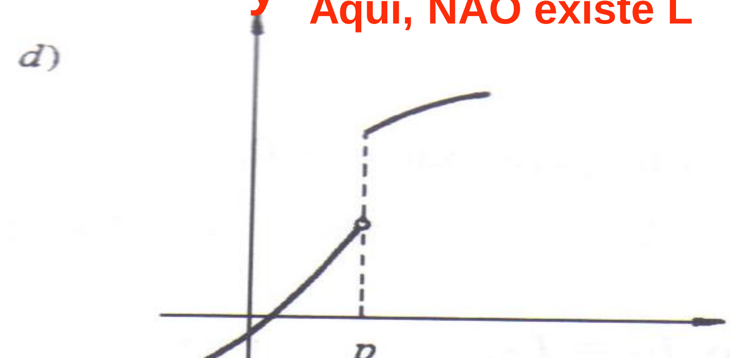




Aqui, existe L= f(p)

Aqui, NÃO existe L





PROPRIEDADES DOS LIMITES

Sejam $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$, então:

P1) O limite de uma constante "k" é igual à própria constante.

l

P2) O limite de uma soma é igual à soma dos limites:

P3) O limite do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da constante pelo limite da função:

P4) O limite de um produto é igual ao produto dos limites:

TESTANDO OS CONHECIMENTOS

17 – Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} x^3$

b) $\lim\limits_{x \to -2} (-3x - 4)$

c) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$

d) $\lim\limits_{x \to -3} (x^2 - 16)$

e) $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{4x^2 - 1}{2x - 1}$

f) $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x}$

g) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} (5y^2 - 4x)$

i) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{3}$

18 – Calcule $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ sendo f dada por:

a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = 3x^2+x$
c) $f(x) = x^3$
d) $f(x) = x+1$
e) $f(x) = 5$

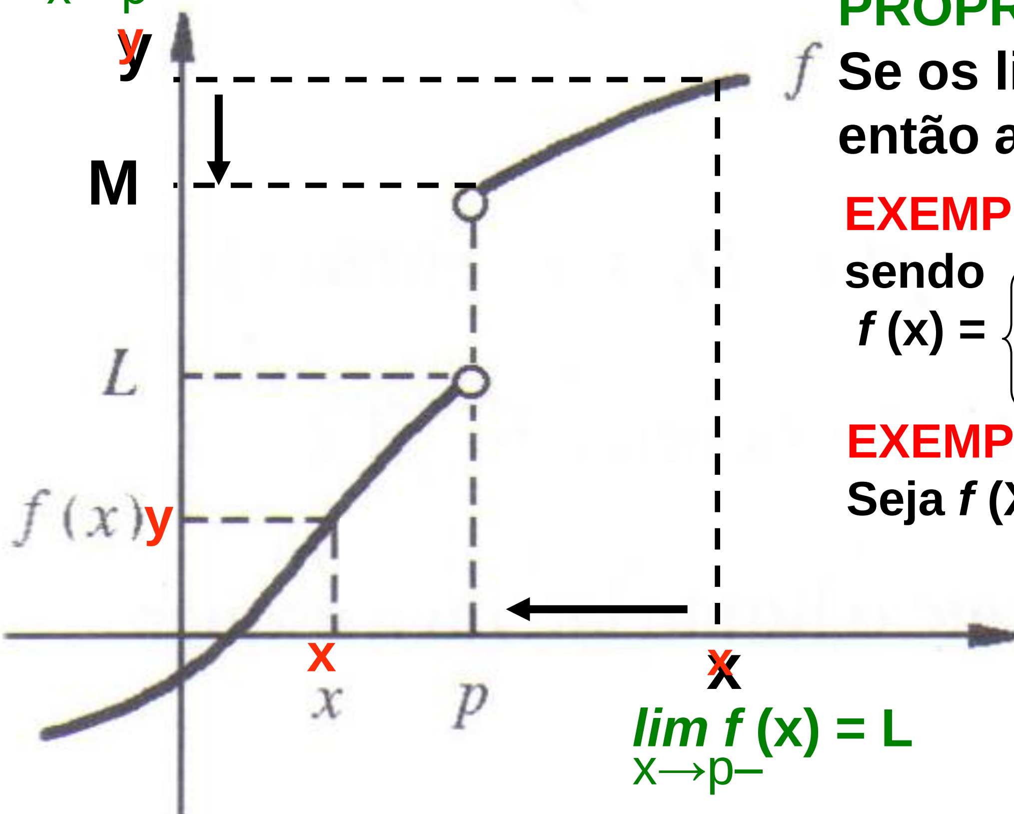
GABARITO: 17) a) 8 b) 2 c) 10 d) –7 e) 2 f) 2
g) $\sqrt{3}/6$ h) $5y^2$ i) $\sqrt{3}$
18) a) $2x$ b) $6x + 1$ c) $3x^2$ d) 1 e) 0

LIMITES LATERAIS

Dessa forma, o número L, denomina-se ***"limite lateral à esquerda"***. Analogamente, o número M, denomina-se ***"limite lateral à direita"***.

Nesse exemplo, como podemos perceber, o limite lateral à esquerda "L" é diferente do limite lateral à direita "M", então dizemos que não existe o limite quando x tende à p.

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = M$$



$$\lim_{x \to p^-} f(x) = L$$

PROPRIEDADE FUNDAMENTAL:

Se os limites laterais forem iguais a L, então a função tem limite L.

EXEMPLO: Calcule $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 3^-} f(x)$, sendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x > 3 \\ 2x, & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

EXEMPLO: Seja

$$f(X) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{para } x < 2 \\ 3, & \text{para } x = 2 \\ 9 - x^2, & \text{para } x > 2 \end{cases}$$

, calcule:

a) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$

b) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$

c) $\lim_{x \to 2} f(x)$

REDE FEDERAL DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA

TESTANDO OS CONHECIMENTOS

19 – Calcule os limites. Se não existir, justifique:

a) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{|x-1|}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{|x-1|}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|x-1|}{x-1}$

d) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$, onde $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \geq 1 \\ 2x, & \text{se } x < 1 \end{cases}$

e) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$, onde $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \geq 1 \\ 2x, & \text{se } x < 1 \end{cases}$

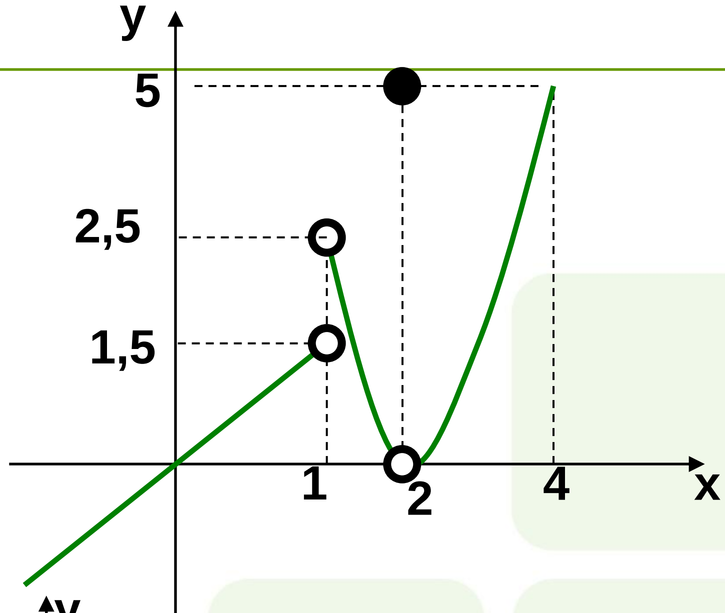
f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$, onde $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \geq 1 \\ 2x, & \text{se } x < 1 \end{cases}$

g) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{g(x) - g(2)}{x-2}$, onde $g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 2 \\ x^2/2, & \text{se } x < 2 \end{cases}$

GABARITO: 19) a) 1 b) 1 c) 1 d) 1 e) 2 f) NÃO EXISTE g) NÃO EXISTE

TESTANDO OS CONHECIMENTOS

20 – Seja f(x) a função definida pelo gráfico ao lado, determine:



a) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

b) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

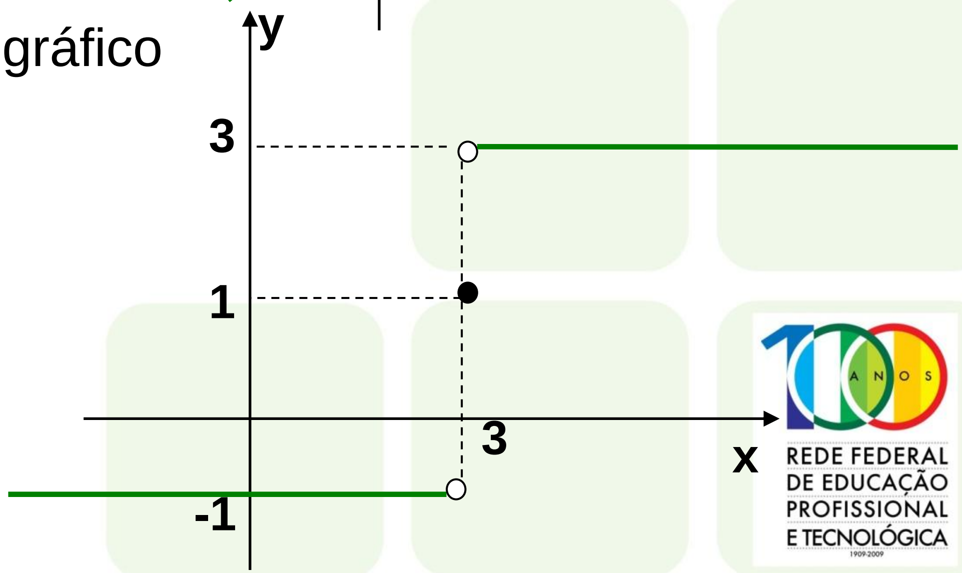
c) $\lim_{x \to 1} f(x)$

d) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$

e) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$

f) $\lim_{x \to 2} f(x)$

21 – Seja f(x) a função definida pelo gráfico ao lado, determine:



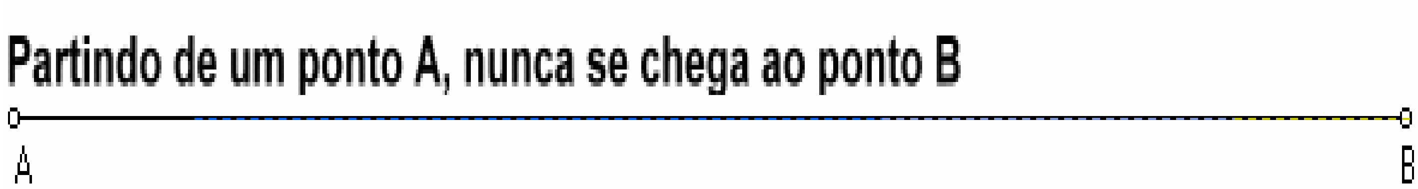
a) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

b) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$

c) $\lim_{x \to 3} f(x)$

LIMITES INFINITOS

O Paradoxo da Dicotomia O argumento desse paradoxo consiste basicamente na idéia de que aquilo que se move tem que chegar na metade de seu percurso antes de chegar ao fim.



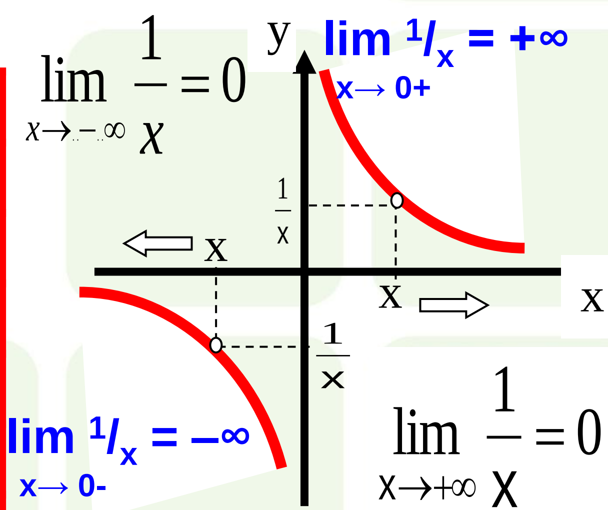
Noção intuitiva Seja a função $f(x) = {}^{1}/_{x}$

x	$y = {}^{1}/_{x}$
1	
2	
10	
100	
1000	
$+\infty$	

x	$y = {}^{1}/_{x}$
0,5	
0,2	
0,1	
0,01	
0,001	
0^+	

x	$y = {}^{1}/_{x}$
–1	
–2	
–10	
–100	
–1000	
$-\infty$	

x	$y = {}^{1}/_{x}$
–0,5	
–0,2	
–0,1	
–0,01	
–0,001	
0^-	



LIMITES INFINITOS

Definição Se à medida que "x" cresce, tendendo ao infinito, os valores de f(x) ficam cada vez mais próximos de um número "L", então dizemos que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$

Analogamente $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

EXEMPLOS:

a) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x - 1}{4x + 1}$

b) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{5x^2 - 1}{4x^2 + 1}$

c) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{3x^4 - 2x^3}{4x^2 + 3x}$

d)

$\lim_{x \to -\infty} x^3$

$\lim_{x \to -\infty} x^2$

$\lim_{x \to +\infty} x^9$

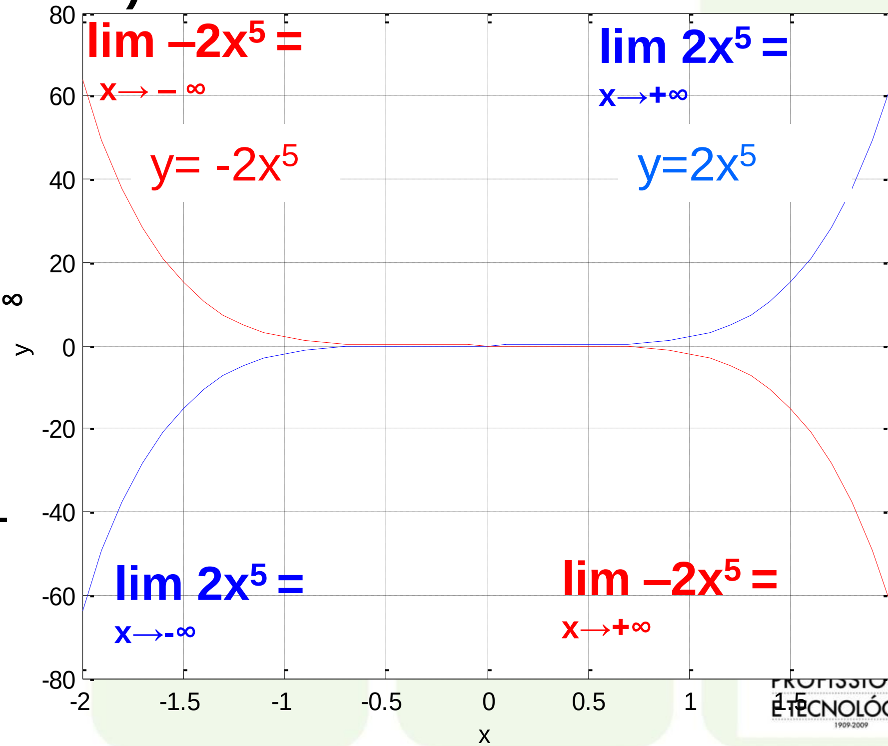
$\lim_{x \to -\infty} -3x^4$

$\lim_{x \to -\infty} -3x^5$

e)

$\lim_{x \to -\infty} -2x^5 =$

$\lim_{x \to +\infty} 2x^5 =$



$\lim_{x \to -\infty} 2x^5 =$

$\lim_{x \to +\infty} -2x^5 =$

TESTANDO OS CONHECIMENTOS

GABARITO: 22) a) $-\infty$ b) $5/7$ c) 0 d) $9/2$ e) $+\infty$ f) 0 g) $+\infty$ h) $+\infty$ i) $+\infty$ j) $+\infty$

22 – Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x^7 - 4x^3 + 10)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^5 + 8x^3}{7x^5 - 9x}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{6x^2 + 2x}{3x^3 - 7}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9x - 3}{2x + 7}$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^5 - 3x^4 + 2}{2x^3 + 7x^2 + 3}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3.|x| + 7}{2x^2 - 3}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} 9x^3 - (2x)^{1/2} + (1/x^3)$

h) $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{|x|}{x^2}$

i) $\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{|x|}{x^2}$

j) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x^2}$

"Longe, ao norte, numa terra chamada INFINITO, existe uma rocha. Possui 100Km de altura, 100Km de largura e 100Km de comprimento. A cada milênio um pássaro vem nela afiar o seu bico. Assim, quando a rocha estiver totalmente gasta pela ação do pássaro, um dia na eternidade terá se passado." (Hendrick Van Loon)

F I M

Site:
www.professorlucianonobrega.wordpress.com

Vá correndo acessar...
Você só paga R$ 5,00
(Brincadeirinha... É de graça!)