MATEMÁTICA II

Aula 12

Determinantes

Professor Luciano Nóbrega

3º Bimestre

DETERMINANTES

DEFINIÇÃO – **A toda matriz quadrada está associado um número real ao qual damos o nome de determinante. O determinante é obtido por meio de uma operação com todos os elementos da matriz.**

OBSERVAÇÃO – Não existe determinante de uma matriz que não seja quadrada.

Determinante de ordem 1

Dada uma matriz quadrada de 1ª ordem, o seu determinante é o número real a_{11} .

Determinante de ordem 2

Dada uma matriz de ordem 2, por definição o determinante associado a essa matriz é dado por:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Em palavras, o determinante é dado pela diferença entre o produto dos elementos da D.P. e o produto dos elementos da D.S.

EXEMPLOS: **Calcule os determinantes das matrizes abaixo:**

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} sen\,x & cos\,x \\ -cos\,x & sen\,x \end{vmatrix}$$

DETERMINANTES

$$Ex: \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinante de ordem 3 (Regra de Sarrus)

O cálculo do determinante de 3ª ordem pode ser feito por meio de um dispositivo prático, denominado "R*egra de Sarrus".*

EXEMPLOS: Resolva as equações:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ x-1 & x+3 \end{vmatrix} = -1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & x \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & sec^2x & cossec^2x \\ sen^2x & 1 & 1 \\ cos^2x & tg^2x & cotg^2x \end{vmatrix} = x$$

16 – (VUNESP) Determine os valores de x, na 1ª volta, de maneira que o determinante da matriz dada abaixo seja nulo.

$$\begin{vmatrix} cos\,x & 0 & sen\,x \\ sen\,x & 1 & cos\,x \\ cos\,x & sen\,x & sen\,x \end{vmatrix}$$

17 – Sendo $f(x) = 12x - x^2$ e $g(x) = x^3 - 24x^2 + 144x$, qual o valor do determinante da matriz ao lado? (⟶)

$$\begin{vmatrix} f(2) & f(1) & f(0) \\ g(2) & g(1) & g(0) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

DETERMINANTES

Determinante de ordem MAIOR QUE 3

Regra de Chió – A matriz deve ter o elemento da 1ª linha e 1ª coluna igual a 1. Caso contrário, devemos usar uma das propriedades para tornar $a_{11} = 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 14 & 30 & 6 \\ 3 & 10 & 20 & 8 \\ 2 & 5 & 16 & 3 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 10 \\ -7 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & -6 \end{vmatrix}$$

EXEMPLO: Calcule o determinante da matriz B, utilizando a regra de Sarrus e a regra de Chió.

CURIOSIDADE

Matriz de Vandermonde – Uma matriz quadrada de ordem n ≥ 2, é chamada de Matriz de Vandermonde quando ela tem a forma dos seguintes exemplos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 14 & 30 & 6 \\ 3 & 10 & 20 & 8 \\ 2 & 5 & 16 & 3 \end{vmatrix}$$

DETERMINANTES

Determinante de ordem MAIOR QUE 3

Teorema de Laplace – Para uma matriz A de ordem 4, escolhendo-se a 1ª linha, temos:

onde A_{ij} é o "cofator", tal que $A_{ij} = (-1)^{i+j} . D_{ij}$ e D_{ij} é o "menor complementar" dado pelo determinante associado à matriz de ordem 3, obtida em A eliminando-se a linha e a coluna que contém o elemento a_{ij} considerado.

18 –

Sendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 7 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, o determinante de A é:

a) 23
b) 45
c) 70
d) 2

19– (UFCE) Determine a soma das raízes da equação:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x-4 \end{vmatrix} = 0$$

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

P1) Quando todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) são nulos, o determinante dessa matriz é nulo.

P2) Se duas filas de uma matriz são múltiplas (ou iguais), então seu determinante é nulo.

P3) Se os elementos de uma fila de uma matriz são combinações lineares (obtidas através de operações) dos elementos correspondentes de filas paralelas, então seu determinante é nulo.

P4) O determinante de uma matriz e o de sua transposta são iguais.

P5) Multiplicando por um número real todos os elementos de uma fila em uma matriz, o determinante dessa matriz fica multiplicado por esse número.

P6) Quando trocamos as posições de duas filas paralelas, o determinante de uma matriz muda de sinal.

P7) Em uma matriz triangular, o determinante é igual ao produto dos elementos da D.P.

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

P8) Teorema de Jacobi – O determinante de uma matriz não se altera quando somamos aos elementos de uma fila uma combinação linear dos elementos correspondentes de filas paralelas.

EXEMPLO: Substititua a 2ª linha pela soma dessa mesma linha com o triplo da 2ª, ou seja $L_2 \leftarrow L_2 + 3.L_2$, em seguida, calcule os determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

P9) Teorema de Binet

EXEMPLO: Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ **determine:**

a) A.B
b) det A
c) det B
d) det (A.B)

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

P10) Determinante da Inversa

EXEMPLO: Seja a matriz B dada a seguir. Determine sua inversa e verifique a propriedade:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

P11) Multiplicação da Matriz por uma Constante

EXEMPLO: Seja a matriz A, dada a seguir, calcule:

a) 3.A
b) det (3A)
c) det A
d) 3^2
e) Verifique a propriedade

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

20 – (UF "LN") Resolva a equação:

$$\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 3 & 3 & 3 \\ x & 3 & 2 & 2 \\ x & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Para isso, siga o procedimento:
1º) Coloque "x" em evidência na 1ª linha;
2º) Aplique a Regra de Chió;
3º) Coloque "3 – x" em evidência na 1ª linha;
4º) De novo, Chió.

21 – (UFMG) Se det A = 10, qual é o determinante de A^{-1} ?

A) Impossível calcular.
B) –10
C) 0,1
D) 10

TESTANDO OS CONHECIMENTOS

22 – (UFPR) Se det A = 2, então podemos afirmar que det (A^t) é igual a: A) –2 B) ½ C) 2 D) NDA

23 – Se det A = $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 10$**, calcule:**

a) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 4a & 4b \\ c & d \end{vmatrix}$

24 – Sejam A e B duas matrizes quadradas de mesma ordem. Sabendo que det A = 6 e det B = 4, calcule det (AB).

25 – (PUC) Se a matriz A (do exercício 23) tem inversa, então $\det A^{-1}$ é:

A) bc – ad B) $^1/_{ad} - {}^1/_{bc}$ c) $^1/_{ad-bc}$ d) $^1/_{\det A^2}$

26 – (UFPR) Uma matriz quadrada A, de ordem 3, possui determinante igual a 2. O valor de det ($2.A^{-1}$) é:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

REDE FEDERAL DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA

F I M

Site:
www.professorlucianonobrega.wordpress.com

Vá correndo acessar...
Você só paga R$ 5,00
(Brincadeirinha... É de graça!)